

# LE TRANSFERT DE CHALEUR CONDUCTIF PAR RAYONNEMENT DANS DES MATERIAUX SOLIDES SEMI-TRANSPARENTS

A. A. MEN and O. A. SERGEEV

Institut de Recherches Scientifiques de la métrologie de D. I. Mendeleev, Léningsad, URSS

(Reçu le 10 juillet 1970)

**Аннотация**—Проведено теоретическое исследование стационарного лучисто-кондуктивного теплообмена в плоском слое с учетом граничных эффектов и селективности оптических свойств вещества. Сформулирована система уравнений, описывающая температурное и радиационное поля в полупрозрачной среде при произвольных индикатрисах отражения границ. На основе численных решений нелинейного интегрального уравнения для температурного поля проанализировано влияние спектральных оптических характеристик на распределение температур в плавленом кварце, сапфире, сернистом кадмии и селенисто-мышьяковистом стекле. Установлено, что в первом из них модель «серого» приближения приводит к максимальным ошибкам, которые могут достигать 45%, в то время как для двух последних эта ошибка не превосходит нескольких процентов. Сапфир занимает промежуточное положение.

NOTATION			
$\vec{q}$ ,	vecteur du flux de chaleur;	$R_v(\psi)$ ,	coefficient spectral de la réflexion pour l'angle d'incidence $\psi$ ;
$\vec{E}$ ,	vecteur de la radiation;	$\Omega$ ,	angle solide équivalent;
$\lambda$ ,	coefficient de conductibilité thermique;	$B_v(\varphi)$ ,	netteté spectrale effective de la frontière à la direction de l'angle $\varphi$ ;
$\kappa$ ,	longueur d'onde de rayonnement;	$Q$ ,	flux d'énergie total;
$\nu$ ,	fréquence du rayonnement;	$T$ ,	température absolue;
$k_\nu$ ,	coefficient spectral de l'absorption;	$T_1, T_2$ ,	températures des frontières gauche et droite de la couche;
$n_\nu$ ,	coefficient spectral de la réfraction;	$\Delta T$ ,	chute totale de température sur la couche, $T_1 - T_2$ ;
$j_\nu$ ,	coefficient spectral du rayonnement;	$\varepsilon_\nu$ ,	niveau spectral du noir de la surface;
$I_B(\nu, T)$ ,	fonction de Planck;	$A(x)$ ,	absorption totale de la bande;
$f_v(\psi, \varphi)$ ,	indicatrice spectrale de la réflexion;	$k$ ,	moyenne de Rosseland;
$I^+(0, \varphi)$ ,	intensités de la radiation au voisinage des frontières;	$n$ ,	valeur moyenne (sur le spectre) du coefficient de réfraction;
$I^-(H, \varphi)$ ,	gauche et droite de la couche à la direction $\varphi$ par rapport à la normale;	$E_p(x)$ ,	fonction integro-exponentielle d'ordre $p$ ;
		$H$ ,	épaisseur de la couche;
		$x$ et $\xi$ ,	coordonnées courantes;

$\varphi$ , angle de l'observation;  
 $\psi$ , angle d'incidence;  
 $d\omega', d\omega$ , angles solides élémentaires dont les axes coïncident respectivement avec les directions  $\psi$  et  $\varphi$ .

L'indice "0" signifie la radiation incidente; l'indice "r" signifie la radiation réflétée à la direction de la réflexion directe. Les indices 1 et 2 se rapportent respectivement aux frontières gauche et droite du milieu.

### INTRODUCTION

ON SAIT que dans les substances possédant les propriétés de l'absorption finale et perméables à la radiation le processus de la transmission de chaleur s'effectue simultanément par deux mécanismes—la conductibilité thermique et le rayonnement. Ce transfert de chaleur est nommé le transfert de chaleur conductif par rayonnement dans les matériaux semi-transparents. A cause des conditions de ce transfert de chaleur compliqué le calcul du champ de température ne peut pas être réalisé à partir de l'équation ordinaire de la conductibilité thermique mais il faut chercher des systèmes plus généraux.

La description mathématique stricte du processus de transmission de chaleur dans les milieux semi-transparents se complique par la nécessité de tenir compte de toute une série de facteurs supplémentaires qui sont liés à la présence du mécanisme de radiation du transfert. Il existe une grande quantité de modèles simplifiés et d'équations d'auteurs différents décrivant la distribution des températures au cours du transfert de chaleur conductif par rayonnement [1–13].

Les difficultés principales de la création de la théorie phénoménologique du transport de chaleur conductif par rayonnement sont dues premièrement aux effets limites et deuxièmement à la sélectivité des propriétés optiques de la substance. Dans le travail présenté ces deux aspects sont considérés par rapport aux milieux semi-transparents qui sont des systèmes con-

densés où la transmission de chaleur a ses particularités en comparaison avec le transfert de chaleur dans les gaz. On y envisage seulement des milieux de géométrie plane aux conditions stationnaires.

### Prise en compte des effets limites

En supposant l'absence de sources internes d'énergie dans le milieu on peut exprimer la loi de la conservation de l'énergie par l'égalité suivante:

$$\operatorname{div}(\bar{q} + \bar{E}) = 0 \quad (1)$$

où, outre le vecteur du flux thermique  $\bar{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$ , est introduit le vecteur de la radiation  $\bar{E}$  qui caractérise le flux intégral de l'énergie radiante en chaque point du milieu [14]. L'équation de transport du rayonnement

$$\frac{dI_v(M)}{dl} = -k_v I_v(M) + j_v(M) \quad (2)$$

lie l'intensité spectrale du rayonnement comme fonction du point  $M$  et de la direction  $l$  avec les coefficients spectraux de l'absorption  $k_v$  et du rayonnement  $j_v$ . Si la solution de l'équation [2] est connue le vecteur de la radiation est déterminé à l'aide de la relation

$$\bar{E} = \int_{\nu=0}^{\infty} \int_{\omega} I_{\nu} \overline{d\omega} \quad (3)$$

où l'intégration est réalisée sur tout le spectre et dans toutes les directions le long desquelles s'effectue le rayonnement. Lorsque le coefficient de rayonnement de chaque élément du volume dépend de la température de ce volume élémentaire le vecteur de la radiation est fonction de la distribution de température et les équations (1)–(3) peuvent être résolues seulement en commun en supposant que dans le cas de l'équilibre thermodynamique local la grandeur  $j_v$  est exprimée par le fonction de Planck [4, 7]:

$$j_v = k_v \cdot n_v^2 \cdot I_B(\nu, T). \quad (4)$$

Le système (1)–(3) doit être complété par les conditions limites. Ici le caractère de la réflexion de la radiation au voisinage des frontières est

assez important. Pour le modèle le plus simple —la réflexion par diffusion—quand l'intensité de la radiation près des frontières est constante dans toutes les directions, la solution du problème est donnée dans les travaux [5, 6, 8, 9, 11]. Une autre cas limite c'est la réflexion régulière. Ce modèle comme le précédent permet d'obtenir l'expression relative au vecteur de radiation [7, 13, 15]. Dans le cas général la réflexion de radiation au voisinage des frontières a un caractère compliqué: grâce à la rugosité de la surface chaque faisceau est réfléchi dans de nombreuses directions. La dépendance de l'intensité du rayonnement réfléchi et de l'angle d'observation  $\varphi$  sera caractérisée par l'indicatrice de la réflexion  $f_v(\psi, \varphi) = I_v(\varphi)/I_{rv}(\psi)$ . En outre en introduisant le coefficient spectral de la réflexion  $R_v(\psi)$  pour chaque angle d'incidence  $\psi$  on peut écrire la loi de la conservation de l'énergie radiante sous la forme suivante:

$$R_v(\psi) \cdot I_{0v} \cdot \cos \psi \cdot d\omega' = \int_{\omega} I_{rv}(\psi) \cdot f_v(\psi, \varphi) \cdot \cos \varphi \cdot d\omega \quad (5)$$

La grandeur

$$\Omega_v(\psi) = \int_{\omega} f_v(\psi, \varphi) \cdot \cos \varphi \cdot d\omega = 2\pi \int_{\varphi} f_v(\psi, \varphi) \times \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \quad (6)$$

sera nommée l'angle solide d'équivalent [16] à l'aide de laquelle est trouvée l'intensité du rayonnement dans la direction de la réflexion régulière

$$I_{rv}(\psi) = \frac{R_v(\psi) I_{0v} \cos \psi d\omega'}{\Omega_v(\psi)} \quad (7)$$

Ensuite l'énergie radiante réfléchie à l'intérieur de  $d\omega$  le long de la direction  $\varphi$  peut être présentée de façon suivante:

$$2\pi \cdot \cos \varphi \cdot d\omega \int_{\psi=0}^{\pi/2} \frac{R_v(\psi) \cdot I_{0v}(\psi)}{\Omega_v(\psi)} \times f_v(\psi, \varphi) \cdot \cos \psi \cdot \sin \psi \cdot d\psi.$$

Outre le rayonnement réfléchi au voisinage des

frontières il existe le rayonnement thermique propre aux surfaces limitant le milieu. Ensuite si les frontières possèdent la propriété de perméabilité la radiation d'une certaine nature peut pénétrer dans le milieu. Pour donner la caractéristique de ces deux types d'un tel rayonnement supplémentaire on introduit le paramètre  $B_v(\varphi)$ —la netteté effective spectrale de la surface limite dans la direction  $\varphi$ .

Envisageons maintenant une couche plate d'épaisseur  $H$ . Plaçons l'origine des coordonnées sur la frontière gauche et écrivons l'équation (2) sous la forme suivante:

$$\cos \varphi \frac{dI_v(x, \varphi)}{dx} = -k_v I_v(x, \varphi) + j_v(x). \quad (4a)$$

En prenant

$$I_v(x, \varphi)/\varphi < \pi/2 = I_v^+(x, \varphi);$$

$$I_v(x, \varphi + \pi)/\varphi < \pi/2 = I_v^-(x, \varphi)$$

on peut considérer la variation de  $\varphi$  dans l'intervalle  $(-\pi/2, \pi/2)$  en résolvant (4a) séparément pour  $I_v^+$  et  $I_v^-$ . Puisque ces grandeurs ont le sens des intensités de la radiation dans la direction de la coordonnée  $x$  de gauche et de droite le long de la direction choisie  $\varphi$ , les conditions limites peuvent être présentées par le système d'égalités suivant:

$$\begin{aligned} I^+(0, \varphi) &= B_1(\varphi) + 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{R_1(\psi)}{\Omega_1(\psi)} \times f_1(\psi, \varphi) \cdot I^-(0, \psi) \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi \cdot d\psi \\ I^-(H, \varphi) &= B_2(\varphi) + 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{R_2(\psi)}{\Omega_2(\psi)} \times f_2(\psi, \varphi) \cdot I^+(H, \psi) \sin \psi \cdot \cos \psi \cdot d\psi \end{aligned} \quad (8)$$

où les indices 1 et 2 se rapportent aux frontières gauche et droite respectivement. Les indices  $v$  y sont omis pour simplifier la solution et ils le seront ultérieurement.

La solution de (4a) est de la forme suivante:

$$I^+(x, \varphi) = I^+(0, \varphi) \exp\left(-\frac{kx}{\cos \varphi}\right) + \int_0^x j(\xi) \times \exp\left(-\frac{k(x-\xi)}{\cos \varphi}\right) \cdot \frac{d\xi}{\cos \varphi} \quad (9)$$

$$I^-(x, \varphi) = I^-(H, \varphi) \exp\left(-\frac{k(H-x)}{\cos \varphi}\right) + \int_x^H i(\xi) \cdot \exp\left(-\frac{k(\xi-x)}{\cos \varphi}\right) \cdot \frac{d\xi}{\cos \varphi} \quad (10)$$

Au cours de la solution qui dérive de (8) et en se servant de (9) et (10) nous aboutissons aux équations intégrales suivantes pour les paramètres  $I^+(0, \varphi)$  et  $I^-(H, \varphi)$ :

$$I^+(0, \varphi) = F^+(\varphi) + \int_{\alpha=0}^{\pi/2} I^+(0, \alpha) \cdot K^+(\alpha, \varphi) \cdot d\alpha \quad (11)$$

$$I^-(H, \varphi) = F^-(\varphi) + \int_{\alpha=0}^{\pi/2} I^-(H, \alpha) \cdot K^-(\alpha, \varphi) \cdot d\alpha; \quad (12)$$

où sont introduites les grandeurs présentées dans l'annexe 1.

Les équations intégrales (11) et (12) décrivent la distribution angulaire de l'intensité de la radiation près des frontières de la couche plate de substance semi-transparente avec les indicatrices arbitraires de la réflexion sur les surfaces. Ces équations sont linéaires et si le champ de températures du milieu, les caractéristiques de réflexion des frontières et la réflexion supplémentaire sont connues, les fonctions  $I^+(0, \varphi)$  et  $I^-(H, \varphi)$  peuvent être trouvées au moins par les méthodes numériques. Mais si la distribution de température dans la couche doit être déterminée, les équations (11) et (12) sont résolues en même temps que (1) et la relation (3) est remplacée par

$$E(x) = 2\pi \int_{v=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} [I^+(x, \varphi) - I_v^-(x, \varphi)] \times \sin \varphi \cdot \cos \varphi \, d\varphi \cdot dv \quad (3a)$$

avec (9) et (10).

Les résultats obtenus incluent comme cas particuliers tous les modèles connus qui sont plus simples. Ainsi dans le cas de  $f_1(\psi, \varphi) = f_2(\psi, \varphi)$  et si  $R_{v_1}$ ,  $R_{v_2}$ ,  $B_{v_1}$  et  $B_{v_2}$  sont constants pour toutes les directions on a le cas de la réflexion par diffusion sur les frontières. Dans ce cas  $\Omega_1 = \Omega_2 = \pi$  et les parties droites de (11) et (12) ne sont pas dépendantes de  $\varphi$  de façon que les équations intégrales se transforment en équations algébriques dont la solution coïncide celle obtenue dans [6, 8, 9, 11, 15]. Si l'on pose  $f_1(\psi, \varphi) = f_2(\psi, \varphi) = \delta_{\psi\varphi}$  on a un modèle de la réflexion régulière. Dans ce cas

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 2\pi \sin \psi \cdot \cos \psi \cdot d\psi$$

et les équations intégrales dégénèrent de nouveau. Après avoir trouvé les fonctions  $I^+(0, \varphi)$  et  $I^-(H, \varphi)$  à partir de (3a) on trouve pour le vecteur de la radiation l'expression qui correspond entièrement aux équations obtenues dans [7, 13, 15].

#### *Prise en compte de la sélectivité des propriétés optiques*

Les systèmes condensés semi-transparents sont limités le plus souvent par des surfaces lisses dont la composante régulière de la réflexion domine. C'est pour quoi pour étudier l'influence des caractéristiques spectrales optiques sur le champ de température on prend une plaque semi-transparente d'épaisseur  $H$  où près de des frontières gauche et droite sont situés des solides nontransparents en contact thermique immédiat avec la plaque et caractérisés par les coefficients spectraux de la réflexion régulière  $R_{1v}$  et  $R_{2v}$  respectivement. La réflexion thermique du côté des frontières sera caractérisée par les nettetés spectrales  $B_{v_1}$  et  $B_{v_2}$  qui dépendent des températures  $T_1$  et  $T_2$  établies sur les frontières de la couche

$$B_{v_1} = \varepsilon_{v_1} \cdot n_v^2 \cdot I_B(v_1 T_1), B_{v_2} = \varepsilon_{v_2} n_v^2 \cdot I_B(v, T_2).$$

Une telle interprétation du problème est réalisée par exemple, pour les expériences sur la détermination des propriétés thermophysiques des matériaux semi-transparents. D'après ce qui a été exposé plus haut en vue des calculs de la distribution thermique il est nécessaire de résoudre l'équation (1) en y introduisant l'expression du vecteur de radiation (3a). La conclusion détaillée est présentée en (13) où l'équation intégral-différentielle suivante pour le champ de température, est donnée

$$\begin{aligned}
 -\lambda \frac{dT}{dx} + 2\pi \int_{v=0}^{\infty} \left\{ \int_{\xi=0}^x j_v(\xi) \cdot E_2[k_v(x-\xi)] \right. \\
 \times d\xi - \int_{\xi=x}^H j_v(\xi) \cdot E_2[k_v(\xi-x)] d\xi \\
 \left. + \int_{\xi=0}^H j_v(\xi) \cdot J_1(x, \xi, v) d\xi + J_2(x, v) \right. \\
 \left. \times B_{v_1} + J_3(x, v) B_{v_2} \right\} dv = C_1; \quad (13)
 \end{aligned}$$

et qui après certaines transformations (elles sont exposées en annexe 2) prend la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 \lambda T(x) = -C_1 x + C_2 + 2\pi \int_{v=0}^{\infty} \left\{ \int_{\xi=0}^H \right. \\
 \times \frac{j_v(0) - j_v(\xi)}{k_v} [E_3(k_v|x-\xi|) + I_1(x, \xi, v)] \\
 \left. \times d\xi + \frac{B_{v_2}(T_1) - B_{v_2}(T_2)}{k_v} I_2(x, v) \right\} dv. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Les intégrations continues de  $C_1$  et  $C_2$  sont déterminées à partir des conditions limites du problème. Contrairement au schéma classique où les températures sont données pour les deux frontières, fixons un seul point de la distribution  $T(x)|_{x=0} = T_1$ . Pour deuxième condition prenons comme donné le flux total de l'énergie  $Q$ . Dans le cas d'une telle présentation du problème,

la température  $T_2$  et la chute totale sur la couche  $\Delta T = T_1 - T_2$  sont trouvées au cours de la solution. La grandeur  $\Delta T$  qui est très sensible à l'influence des facteurs différents en étude peut être utilisée comme critère de l'influence de la composante de radiation sur le processus de la transmission de chaleur dans un milieu semi-transparent.

En tenant compte des conditions limites et de l'égalité (4) on a obtenu une équation intégrale nonlinéaire pour le champ de température

$$\begin{aligned}
 T(x) = f(x) - N \int_{\xi=0}^H \phi_1[x, \xi, T(\xi)] d\xi \\
 - N\phi_2(x), \quad (15)
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \phi_1[x, \xi, T(\xi)] = \int_{v=0}^{\infty} n_v^2 \{ I_B(v, T_1) - I_B \\
 \times [v, T(\xi)] \} \cdot [E_3(k_v|\xi-x|) \\
 + I_1(0, \xi, v) - I_1(x, \xi, v)] dv \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_2(x) = \int_{v=0}^{\infty} \frac{n_v^2}{k_v} \epsilon_{v_2} [I_B(v, T_1) - I_B(v, T_2)] \\
 \times [I_2(0, v) - I_2(x, v)] dv;
 \end{aligned}$$

$$f(x) = T_1 - \frac{Qx}{\lambda}; N = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (17)$$

Dans le cas général la résolution de l'équation (15) est impossible tout d'abord à cause de la dépendance spectrale des grandeurs  $k(v)$  et  $n(v)$  très compliquée et ordinairement de forme analytique inconnue. Hors de l'étude du transfert de chaleur conductif par rayonnement dans les gaz aux conditions ordinaires (qui ne sont pas liées aux ondes de choc, à l'ionisation avec déséquilibre et aux températures très hautes), dans le spectre d'absorption on tient compte d'une ou de quelques bandes d'oscillation-rotation se trouvant dans la zone infrarouge; on y étudie l'absorption totale de la bande déterminée par la relation [17-19]

$$A(x) = \int [1 - \exp(-k_v x)] dv$$

où l'intégration est étendue à toute la bande. Le profil  $A(x)$  est trouvé à l'aide des relations semi-empiriques différentes [19]. En se servant de cette méthode on trouve dans [12] et [18] les solutions du problème pour les cas plus simples en remplaçant toutes les fonctions intégrées exponentielles par les exponentielles  $E_3(t) \approx \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t}$  et en considérant la fonction de Planck comme constante à l'intérieur de la bande (ce qui est possible grâce à l'étroitesse de cette dernière.) Ainsi nous obtenons une équation simplifiée où l'intégration sur le spectre disparaît et la sélectivité de l'absorption est exprimée dans la grandeur  $A$ .

Il est évident que rien de pareil ne peut être proposé pour les systèmes condensés. Au contraire, dans ce cas le coefficient d'absorption peut varier dans certaines zones du spectre plus lentement que la fonction de Planck. En outre pour les milieux solides et liquides l'absorption est continue et elle occupe une partie assez grande du spectre: les données sur les caractéristiques optiques spectrales ne sont pas nombreuses et s'expriment seulement par les courbes expérimentales de forme compliquée. Ici il paraît rationnel d'approcher les courbes spectrales par les segments de fonctions algébriques simples et après avoir réalisé la division correspondante du spectre on fait l'intégration par  $\nu$  dans (16) et (17) aux limites de chaque secteur avec ensuite la sommation sur toutes les intégrales.

En tenant compte de ce qui a été exposé on peut obtenir la solution numérique de l'équation nonlinéaire (15). Comme la méthode d'itération a un domaine de convergence limité, la méthode de formules quadratures a été utilisée. En prenant en considération le fait que la température  $T_2$  de la frontière n'est pas connue l'intégrale dans (15) est remplacée par la somme finale de la formule quadrature de Markov qui comprend dans le nombre de noeuds les extrémités de l'intégration et qui possède le plus haut niveau de précision. Ainsi nous obtenons le système d'équations nonlinéaires algébriques qui a été résolu d'après la méthode modifiée de

Newton-Kantorovich [20]; la matrice de Jakoby a été calculée seulement au premier pas en ensuite elle a été conservée constante. Pour la première approximation a été utilisée la solution de l'équation intégrale linéaire construite par la méthode de la linéarisation de l'équation (15) après l'introduction des caractéristiques constantes optiques sur le spectre (approximation "grise"). Une telle équation intégrale donne la possibilité d'une solution analytique qui peut être construite avec un certain niveau de précision [21]. Mais il est plus commode de chercher la solution numérique de l'équation linéarisée à l'aide de la même formule quadrature.

#### DISCUSSION DES RÉSULTATS

Pour les calculs ont été choisis les matériaux dont les spectres d'absorption diffèrent beaucoup: le quartz fondu, le saphir, le sulfure de cadmium, le verre sélénico-arsénical (toutes les caractéristiques optiques sont tirées de (22)).

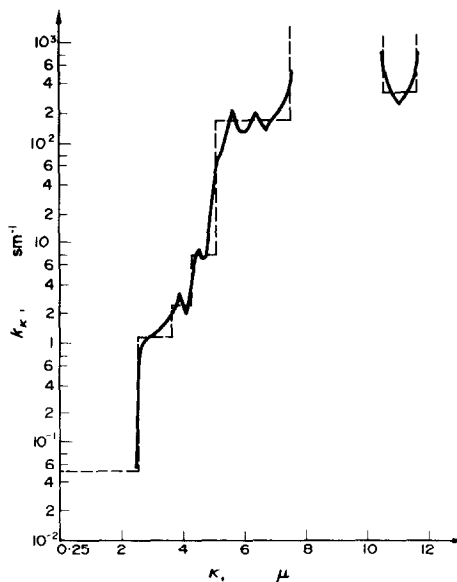


FIG. 1. Le spectre de l'absorption du quartz fondu (ligne continue) et la fonction d'approximation constante par morceaux (ligne pointillée).

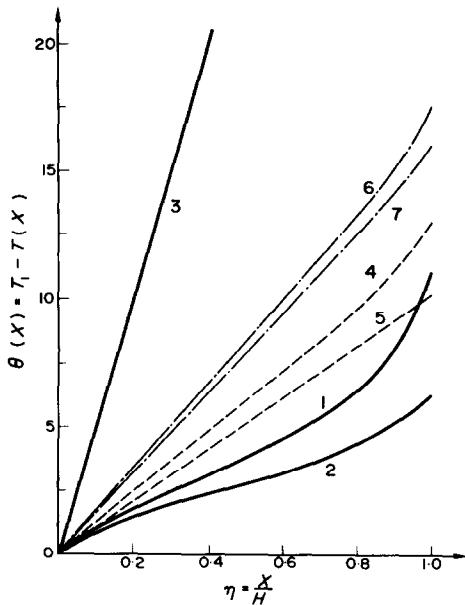


FIG. 2. La distribution de température dans une plaque de quartz fondu.

$T_1 = 1000^\circ\text{K}$

1 et 2.  $H = 30 \text{ mm}$   $R = 0$   $Q = 7500 \text{ W/m}^2$

4 et 5.  $H = 5 \text{ mm}$   $R = 0$   $Q = 7500 \text{ W/m}^2$

6 et 7.  $H = 5 \text{ mm}$   $R = 0,5$   $Q = 7500 \text{ W/m}^2$

2,5 et 7. L'approximation "grise".

3. Sans compte du rayonnement.

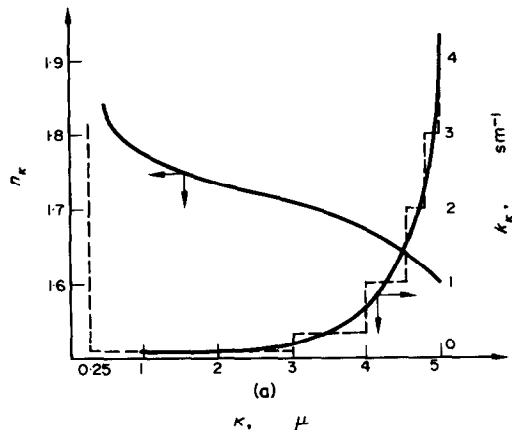
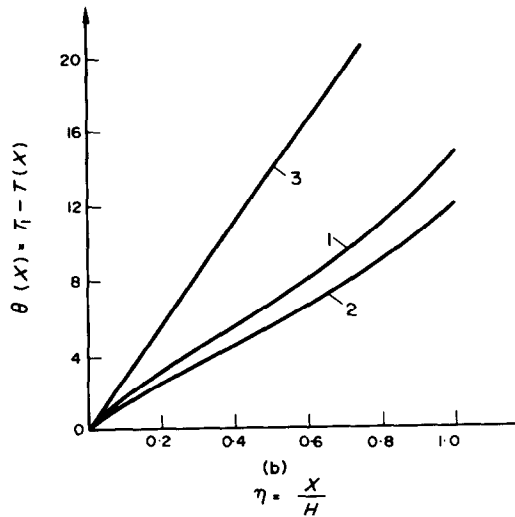


FIG. 3. Les propriétés optiques (a) et la distribution de température (b) dans une couche plate de saphir ( $H = 30 \text{ mm}$ ,  $R = 0$ ,  $T_1 = 1000^\circ\text{K}$ ,  $Q = 7500 \text{ W/m}^2$ ).

1. En tenant compte de la dépendance  $k(\kappa)$

2. "L'approximation "grise".

3. Sans compte du rayonnement.

Pour simplification l'approximation des spectres a été réalisée par des fonctions constantes par morceaux, ce qui est présenté à Fig. 1, 3a, 4a et 5a, et les coefficients de réflexion de deux frontières ont été considérés égaux. Pour l'évaluation de la précision de la formule quadrature on a effectué au cours de la solution un changement du nombre de noeuds de  $m = 7$  à  $m = 12$ . La précision de la grandeur calculée  $\Delta T$  à l'approximation linéaire a été de l'ordre  $4 \cdot 10^{-5}^\circ\text{C}$  pour la chute totale de température de l'ordre de  $16^\circ\text{C}$ . Tous les calculs ont été effectués sur la calculatrice électronique BESM-4.

La prise en compte de la sélectivité des propriétés optiques du matériau au cours des calculs du champ de température présente un

grand intérêt en elle-même mais de plus grâce à elle on peut apprécier la possibilité de l'approximation dit "grise" quand les caractéristiques optiques réelles de la substance sont remplacées par les grandeurs constantes  $k$  et  $n$  moyennées sur le spectre. C'est justement dans ce but que toutes les solutions de l'équation (15) ont été comparées avec les solutions pour un milieu

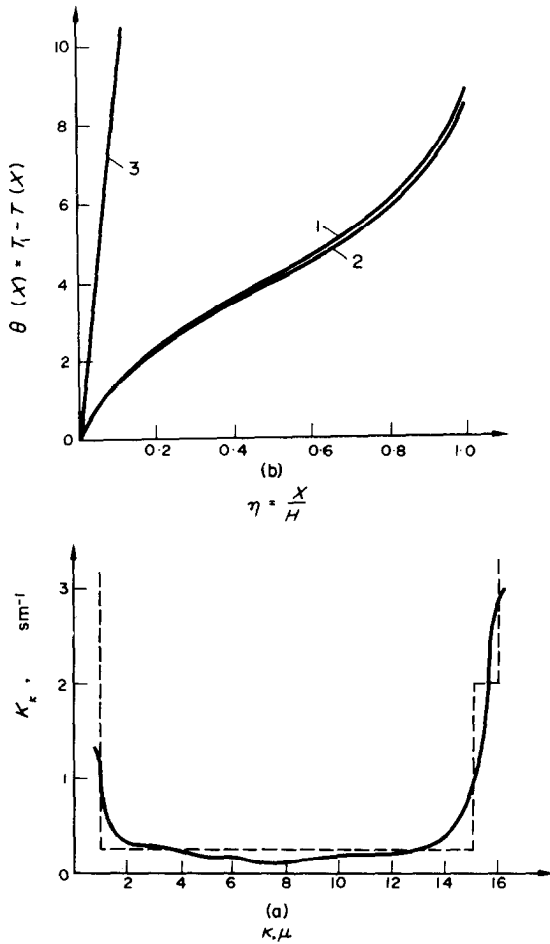


FIG. 4. Le spectre de l'absorption (a) et la distribution de température (b) dans une couche mince de cadmium sulfide. ( $H = 30$  mm,  $R = 0$ ,  $T_1 = 1000^\circ\text{K}$ ,  $Q = 7500$  W/m<sup>2</sup>). 1. En tenant compte de la dépendance  $k(\kappa)$ ; 2. L'approximation "grise"; 3. Sans compte du rayonnement.

"gris". La moyenne de Rosseland déterminée au préalable

$$k = \frac{\int_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial I_B(\nu, T)}{\partial T} d\nu}{\int_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{k_\nu} \frac{\partial I_B(\nu, T)}{\partial T} d\nu} \quad (18)$$

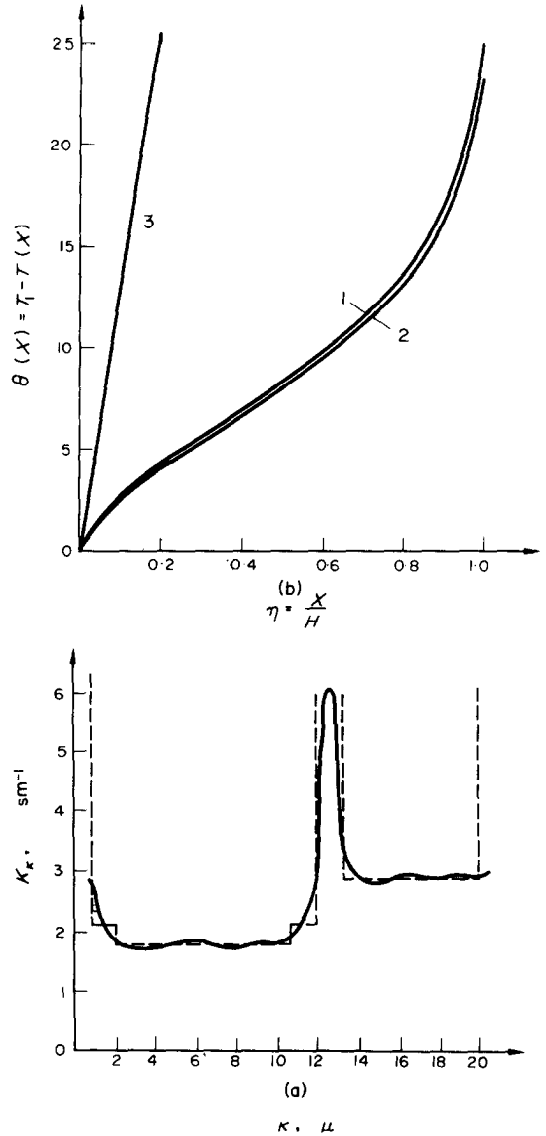


FIG. 5. Le spectre de l'absorption (a) et la distribution de température (b) dans une couche mince de verre sélénite-arsenic ( $H = 30$  mm,  $R = 0$ ,  $T_1 = 1000^\circ\text{K}$ ,  $Q = 7500$  W/m<sup>2</sup>). 1. En tenant compte de la dépendance  $k(\kappa)$ ; 2. L'approximation "grise"; 3. Sans compte du rayonnement.

ainsi que la valeur constante de  $n$  ont été introduites dans l'équation (15), ensuite la solution se répétait.

Les courbes 1 des Figs. 2-5 correspondent à la solution de l'équation (15) avec l'absorption sélective; les courbes 2 expriment l'approximation "grise"; les courbes 3 montrent le changement possible de la température en l'absence du transfert par rayonnement. C'était à prévoir que l'influence de la sélectivité de l'absorption se manifeste le moins dans la plaque de sulfure de cadmium dont le spectre  $k(\lambda)$  a le caractère le plus uniforme. La présence d'un pic singulier sur la courbe  $k(\lambda)$  pour le verre sélénico-arsénical n'est également pas d'une grande importance. Le coefficient d'absorption du saphir varie assez sensiblement dans le domaine où se trouve le maximum de la radiation pour la température choisie, ce qui conduit à l'altération de l'approximation "grise". Pour le cas du quartz fondu le spectre de l'absorption est de forme complexe et l'utilisation de la constante  $k$  conduite à des erreurs assez importantes qui s'accroissent avec l'augmentation de l'épaisseur de la couche et la décroissance des coefficients de réflexion des frontières.

Sur la Fig. 2 sont présentés les résultats des calculs pour deux épaisseurs suivantes  $H_1 = 5$  mm et  $H_2 = 30$  mm et deux coefficients de réflexion. Dans la plaque d'épaisseur 5 mm l'erreur de la détermination de la grandeur  $\Delta T$  dans l'approximation "grise" s'accroît de 9 pour cent ( $R = 0,5$ ) à 18 pour cent ( $R = 0$ ), mais si  $H = 30$  mm elle atteint 45 pour cent.

L'influence de la dépendance spectrale du coefficient de la réflexion a été étudiée sur l'exemple du saphir car la variation du  $n(\lambda)$  de ce matériau est exprimée plus nettement (Fig. 3). D'après les calculs effectués, même dans ce cas, l'influence de  $n(\lambda)$  sur la précision du calcul du champ de température est très faible; dans le cas de l'utilisation de la valeur constante l'erreur  $\Delta T$  ne dépassait pas 1 pour cent.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. B. S. KELLET, The steady flow of heat through hot glass, *J. Am. Opt. Soc.* **42**, 5 (1952).

2. L. GENZEL, Der Anteil der Wärmestrahlung bei Wärmeleitungsvorgängen. *Z. Phys.* **135**, 177 (1953).
3. VAN DER HELD, The contribution of radiation to the conduction of heat, *Appl. Sci. Res.* **A3**, 237 (1952); **A4**, 77 (1953).
4. R. GARDON, Emissivity of transparent materials, *J. Am. Ceram. Soc.* **39** 8, 278 (1956).
5. R. VISKANTA et R. I. GROSH, Recent advances in radiant heat transfer. *Appl. Mech. Rev.* **17**, 91 (1964).
6. R. GOULLARD et M. GOULLARD, One-dimensional energy transfer in radiant media. *Int. J. Heat Mass Transfer* **1**, 81 (1960).
7. L. P. FILIPPOV, L'influence du rayonnement et de l'absorption du milieu sur le procès du transfert de chaleur, *Vestn. MGU, ser Fiz.-Mat. Est. Nauk*, No 2 (1954).
8. R. VISKANTA et R. J. GROSH, Effect of surface emissivity on heat transfer by simultaneous conduction and radiation. *Int. J. Heat Mass Transfer* **5**, 729 (1962).
9. V. N. ADRIANOV, Transfert de chaleur conductif par rayonnement et transfert de chaleur convectif par rayonnement, *Transfert de Chaleur et de Masse*, V. 2. Nauka i tehnika, Minsk (1965).
10. F. ENGELMANN et H. E. SCHMIDT, Heat transport by radiation in solids. *Nucl. Sci. Engng* **24** (4), 1 (1966).
11. N. A. RUBSTOV, F. A. KUZNETSOV et A. L. BURKA, Sur l'étude du transfert de chaleur par rayonnement dans des milieux continus, *Transfert de Chaleur et de Masse*, V. 1. Energiya, Moskva (1968).
12. A. A. MEN et O. A. SERGEEV, Transport de chaleur conductif par rayonnement dans une couche plate, *Isled Oblasti Tepl. Ismer.*, Tr. metr. inst. SSSR, vyp. 111 (171, izd. Standartov, Moskov-Leningrad (1969).
13. A. A. GERCHUN, *Théorie du champ lumineux*, Sb. Izbranie trudy po fotometrii i svetotekhnike, Izd. Fizmatgiz, Moskva (1958).
14. H. POLTZ, Die Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten. II. Der Strahlungsanteil der effektiven Wärmeleitfähigkeit. *Int. J. Heat Mass Transfer* **8**, 515 (1965).
15. R. A. SAPOJNIKOV, *Photométrie Théorique*. Gosenergoizdat, Moskva (1960).
16. J. K. EDWARDS et W. A. MENARD, Comparison of models for correction of total band absorption, *Appl. Optics* **3**, 621 (1964).
17. S. N. CESS et S. N. TYVERY, Transfert de chaleur dans un flux laminaire du gaz absorbant et rayonnant entre les plaques parallèles, *Transfert de Chaleur et de Masse*, V. 1. Energiya, Moskva (1968).
18. R. GRIEF, Transfert de chaleur par rayonnement dans une couche fine du milieu nongris, *Teplotperedacha*, No. 3 (1968).
19. L. V. KANTOROVICH et V. I. KRYLOV, *Methods Approximatifs de l'Analyse Supérieur*. Fizmatgiz, Moskva, (1960).
20. A. A. MEN, D'une équation intégrale du transfert de chaleur conductif par rayonnement, *Ingenerno-fizicheskii jurnal* **18**, No 3 (1970).
21. E. M. VORONKOVA, B. M. GRESHCHNIKOV, G. I. DISTLER et I. P. PETROV, *Les Matériaux Optiques pour le Technique Infrarouge*. Nauka, Moskva (1965).

## ANNEXE 1

Dans les équations (11) et (12) sont introduits les indices suivants:

$$F^+(\varphi) = B_1(\varphi) + 2\pi \int_{\psi=0}^{\pi/2} D_1(\psi, \varphi) \cdot B_2(\psi) \exp\left(-\frac{kH}{\cos \psi}\right) \times \sin \psi \cdot \cos \psi \, d\psi + 2\pi \int_{\psi=0}^{\pi/2} \int_{\xi=0}^H D_1(\psi, \varphi) j(\xi) \cdot \times \exp\left(-\frac{k\xi}{\cos \psi}\right) \sin \psi \, d\xi \, d\psi + 4\pi^2 \int_{\psi=0}^{\pi/2} \quad (1.1)$$

$$\int_{\alpha=0}^{\pi/2} D_1(\psi, \varphi) \cdot D_2(\alpha, \psi) \int_{\xi=0}^H j(\xi) \exp\left\{-\left[\frac{kH}{\cos \psi} + \frac{k(H-\xi)}{\cos \alpha}\right]\right\} \cos \psi \cdot \sin \psi \cdot \sin \alpha \cdot d\xi \, d\alpha \, d\psi;$$

$$K^+(\alpha, \varphi) = 4\pi^2 \int_{\psi=0}^{\pi/2} D_1(\psi, \varphi) \cdot D_2(\varphi, \psi) \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi \cdot \times \cos \alpha \cdot \sin \alpha \times \exp\left[-\left(\frac{kH}{\cos \psi} + \frac{kH}{\cos \alpha}\right)\right] d\psi; \quad (1.2)$$

$$F^-(\varphi) = B_2(\varphi) + 2\pi \int_{\psi=0}^{\pi/2} D_2(\psi, \varphi) \cdot B_1(\psi) \cdot \exp\left(-\frac{kH}{\cos \psi}\right) \sin \psi \cdot \cos \psi \, d\psi + 2\pi \int_{\psi=0}^{\pi/2} \int_{\xi=0}^H D_2(\psi, \varphi) \cdot j(\xi) \times \exp\left[-\frac{k(H-\xi)}{\cos \psi}\right] \sin \psi \, d\xi \, d\psi + 4\pi^2 \int_{\psi=0}^{\pi/2} \int_{\xi=0}^H \int_{\alpha=0}^{\pi/2} D_2(\psi, \varphi) \times D_1(\alpha, \psi) \cdot j(\xi) \cdot \exp\left[-\left(\frac{k\xi}{\cos \alpha} + \frac{kH}{\cos \psi}\right)\right] \cos \psi \sin \psi \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha \, d\xi \, d\psi; \quad (1.3)$$

$$K^-(\alpha, \varphi) = 4\pi^2 \int_{\psi=0}^{\pi/2} D_2(\psi, \varphi) \cdot D_1(\alpha, \psi) \cdot \times \exp\left[-\left(\frac{kH}{\cos \alpha} + \frac{kH}{\cos \psi}\right)\right] \times \sin \psi \cdot \cos \psi \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \, d\psi; \quad (1.4)$$

$$D_i(\gamma, \beta) = \frac{R_i(\gamma) \cdot f_i(\gamma, \beta)}{\Omega_i(\gamma)}, \quad (i = 1, 2). \quad (1.5)$$

## ANNEXE 2

Dans l'équation (13) dans [13] sont introduits les indices suivants:

$$J_1(x, \xi, v) = \int_{\psi=0}^{\pi/2} \beta_v \{R_{v_1} \exp[-\alpha_v(x + \xi)] + R_{v_1} R_{v_2} \exp[-\alpha_v(2H + x - \xi)] - R_{v_2} \exp[-\alpha_v(2H - x - \xi)] - R_{v_1} R_{v_2} \times \exp[-\alpha_v(2H - x + \xi)]\} d\varphi; \quad (2.1)$$

$$J_2(x, v) = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos \varphi \cdot \beta_v \{R_{v_1} \exp[-\alpha_v(H + x)] - \exp[-\alpha_v(H - x)]\} d\varphi; \quad (2.2)$$

$$J_3(x, v) = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos \varphi \cdot \beta_v \{\exp(-\alpha_v x) - R_{v_2} \times \exp[-\alpha_v(2H - x)]\} d\varphi; \quad (2.3)$$

$$\beta_v = \sin \varphi [1 - R_{v_1} R_{v_2} \exp(-2\alpha_v H - 1)];$$

$$\alpha_v = k_v / \cos \varphi.$$

En transformant l'équation (13) on tient compte du fait que le vecteur de la radiation de la couche isothermique est nul et on utilise la formule de différentiation de l'intégrale sur le paramètre. Donc en intégrant (13) on obtient

$$\lambda T(x) = -C_1 x + C_2 + 2\pi \int_{v=0}^{\infty} \left\{ \int_{\xi=0}^H [j_v(0) - j_v(\xi)] k \times [E_3(k_v |x - \xi|) + I_1(x, \xi, v)] d\xi + [B_{v_2}(T_1) - B_{v_2}(T_2)] / k_v I_2(x, v) \right\} dv; \quad (2.4)$$

les indices suivants sont introduits:

$$I_1(x, \xi, v) = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos \varphi \{ \beta_v R_{v_1} \exp[-\alpha_v(x + \xi)] + R_{v_2} \beta_v \{ \exp[-\alpha_v \times \exp[-\alpha_v(2H + x - \xi)] + R_{v_2} \beta_v \{ \exp[-\alpha_v \times (2H - x - \xi)] + R_{v_1} \exp[-\alpha_v(2H - x + \xi)] \} \} \} d\varphi; \quad (2.5)$$

$$I_2(x, v) = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos^2 \varphi \cdot \beta_v \{ R_{v_1} \exp[-\alpha_v(H + x)] + \exp[-\alpha_v(H - x)] \} d\varphi, \quad (2.6)$$

en admettant que  $B_{v_1}$  et  $B_{v_2}$  ne dépendent de  $\varphi$ .

## RADIANT-CONDUCTION HEAT TRANSFER IN SEMI-TRANSPARENT SOLID MATERIALS

**Abstract**—A theoretical study of steady-state radiant-conductive heat transfer in a plane layer is carried out, boundary effects and selectivity being accounted for. A set of equations is formulated which describes temperature and radiation fields in a semitransparent medium with arbitrary indicatrices of boundary reflection. On the basis of numerical solutions of a nonlinear integral equation for a temperature field the effect of spectral integral optical characteristics on temperature distributions is analysed in melted quartz, sapphire, cadmium sulphide, selenium-arsenic glass.

It is found that in the first material the "grey" approximation model yields maximum errors which may reach 45 per cent whereas in the last two materials this error is within several per cent. For sapphire the error is intermediate.

## LE TRANSFERT DE CHALEUR PAR RAYONNEMENT-CONDUCTION DANS DES MATERIAUX SOLIDES SEMI-TRANSPARENTS

**Résumé**—Une étude théorique du transfert de chaleur conductif par rayonnement stationnaire dans une couche plate compte tenu des effets limites et de la sélectivité des propriétés optiques de la substance est proposée. Un système d'équations décrivant les champs de température et de rayonnement dans un milieu semi-transparent aux indicatrices arbitraires de réflexion des frontières est formulé. A partir des solutions proposées de l'équation intégrale non linéaire pour un champ de température, on a étudié l'influence des caractéristiques optiques spectrales sur la distribution de température dans le quartz fondu, le saphir, le sulfure de cadmium et le verre sélénico-arsénical. On a montré que dans la première des substances nommées le modèle de l'approximation "grise" conduit aux erreurs maximales qui peuvent être de l'ordre de 45 %, en même temps que pour les deux dernières cette erreur ne dépasse pas quelques pour cent. Le saphir y prend une place intermédiaire.

## WÄRMETRANSPORT DURCH STRAHLUNG IN HALBDURCHSICHTIGEN FESTKÖRPERN

**Zusammenfassung**—Der stationäre Wärmetransport durch Strahlung in einer ebenen Schicht wird theoretisch untersucht, wobei Randeffekte und Selektivität berücksichtigt werden. Es wird ein Gleichungssystem aufgestellt, das das Temperatur- und Strahlungsfeld in einem halbdurchsichtigen Medium bei willkürlicher Indizierung der Grenzflächenreflexion beschreibt. Auf der Grundlage von numerischen Lösungen einer nichtlinearen Integralgleichung für das Temperaturfeld wird der Einfluss von integralen, spektralen, optischen Daten auf die Temperaturverteilung in geschmolzenem Quarz, Saphir, Cadmiumsulfid und Selen-Arsen-Glas analysiert. Es zeigt sich, dass bei dem ersten Material die "graue" Näherung den grössten Fehler ergibt, der 45% erreichen kann, während bei den letzten beiden Materialien der Fehler innerhalb einiger Prozent liegt. Bei Saphir liegt der Fehler dazwischen.